№ 9-дәріс.

Тақырыбы: Екінші ретті және жоғарғы ретті сызықты біртекті коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер.

Жоғарғы ретті сызықтық дифференциал теңдеулерді қарастыралық.

Анықтама 1. Егер сызықты дифференциалдық теңдеудегі:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (1)$$

коэффиценттері деп аталатын барлық a_i, $i=\overline{1,n}$ - тұрақты сандар болса, онда ол тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

Жоғарғы ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер.

Оң жағы нөлге тең болатын теңдеулер жүйесінің фундаменталдық шешімдер жүйесін табайық:

$$L[y]=0 \qquad (2)$$

Оның дербес шешімін $y=e^{kx}$ түрінде іздейміз, мұндағы k - қандай да бір тұрақты. Осы тұрақтыны табалық. (2)-ге $y=e^{kx}$ қойсақ:

$$L\left[e^{kx}\right]=e^{kx}\left(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n\right)=0\ .$$

$\forall x:\ e^{kx}\neq 0$ болғандықтан, $y=e^{kx}$ (2) теңдеуінің шешімі болады, егер k мінездемелік деп аталатын мынадай алгебралық теңдеудің түбірі болса:

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0\ .$$

$n=2$ жағдайы үшін фундаменталдық шешімдер жүйесін табу мәселесіне тоқталайық:

$$y''+py'+qy=0\ . \qquad (3)$$

Бұл теңдеудің мінездемелік теңдеуі былай болады:

$$k^2+pk+q=0\ . \qquad (4)$$

Ол алгебралық квадраттық теңдеу болғандықтан, мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

1) $D=p^2-4q>0$. Онда $k_1\neq k_2$- (4) теңдеуінің нақты түбірлері. $y_1=e^{k_1x}$ және $y_2=e^{k_2x}$ дербес шешімдері фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды, себебі

$$W\left[y_1,y_2\right]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot\left(k_2-k\right)\neq 0$$, өйткені $k_1\neq k_2$.

Сызықты теңдеулердің жалпы теориясын қолданып, (3) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \qquad (5)$$

2) $D=p^2-4q<0$. Түбірлері түйіндес комплекс сандар: $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Теңдеудің дербес шешімдері былай болады: $y_{1,2}=e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta}=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x\pm i\sin\beta x\right)$.

Сызықты операторлардың қасиеттерінен: $L\left[U(x)+iV(x)\right]\Rightarrow L[U]+iL[V]\equiv 0\Rightarrow L[U]=0$ және $L[V]=0$ екендігі шығады, яғни, теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ функцияларынан тұрады. Ендеше, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x\pm C_2\sin\beta x\right). \qquad (6)$$

3) $D=p^2-4q=0$. Онда $k_1=k_2=k=-\dfrac{p}{2}$. Тек бір ғана шешім табамыз: $y_1=e^{kx}$. Бірінші шешім y_1-ге тәуелсіз теңдеудің екінші шешімін табамыз. Шешімді $y_2=U(x)e^{kx}$ түрінде іздейміз.

$$L[y]=e^{kx}\cdot\left[u''+(2k+p)u'+\left(k^2+pk+q\right)\right]\Rightarrow u''=0\Rightarrow u=Ax+B\Rightarrow\left|A=1,\ B=0\right|\Rightarrow u=x.$$

Теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі мына түрде болады: $y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$, себебі $W[y_1,y_2]\neq 0$. Онда берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}. \qquad (7)$$

Сонымен, жалпы жағдайда, (2) теңдеуінің шешімін алу үшін:

1) мінездемелік теңдеуін құру және оны шешу

2) теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесін табу:

А) әрбір бір еселі k нақты түбіріне $y=e^{kx}$ дербес шешімі сәйкес келеді.

Б) Бір еселі әрбір $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ комплекс түбірлер жұбына $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ екі дербес шешім сәйкес келеді.

В) әрбір r - еселі k нақты түбіріне r дербес шешім сәйкес келеді:

$y=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$, $y_3=x^2e^{kx}$, $\dots$, $x^{r-1}e^{kx}$.

Г) әрбір r -еселі $k=\alpha\pm i\beta$ комплекс түбірлеріне $2r$ шешім сәйкес келеді:

$y_1=e^{kx}\cos\beta x$, $y_2=xe^{kx}\cos\beta x$, $y_3=x^2e^{kx}\cos\beta x$, $\dots$, $y_r=x^{r-1}e^{kx}\cos\beta x$,

$\overline{y}_1=e^{kx}\sin\beta x$, $\overline{y}_2=xe^{kx}\sin\beta x$, $\overline{y}_3=x^2e^{kx}\sin\beta x$, $\dots$, $\overline{y}_r=x^{r-1}e^{kx}\sin\beta x$,

Дербес шешімдердің саны тура n -ге тең және олар фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды.

3) жалпы шешімін жазу: $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$.

Мысал 1. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап

$$y^{IV}-2y''=0.$$

Шешуі.

а) Мінездемелік теңдеуін құрып, оны шешеміз:

$k^4-2k^2=0\Rightarrow k^2\left(k^2-2\right)=0\Rightarrow k_{1,2}=0,\ k_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

б) y_1, y_2, y_3, y_4 фундаменталды шешімдер жүйесін табамыз.

$k=0$ - екі еселі түбір, онда: $y_1=e^{0x}=1$, $y_2=x\cdot e^{0x}=x$.

$k=-\sqrt{2}\Rightarrow y_3=e^{-\sqrt{2}x}$, $k=\sqrt{2}\Rightarrow y_4=e^{\sqrt{2}x}$.

в) Жалпы шешімі: $y=C_1+C_2x+C_3e^{-\sqrt{2}x}+C_4e^{\sqrt{2}x}$

Мысал 2. $y^V+2y'''+y'=0$

а) $k^5+2k^3+k=0\Rightarrow k\left(k^2+1\right)^2=0\Rightarrow k_1=0$, $k=\pm i$ - екі еселі түбір.

б) $k=0\Rightarrow y_1=1$, $k=\pm i\Rightarrow y_2=\cos x$, $y_3=\sin x$, $y_4=x\cos x$, $y_5=x\sin x$.

в) $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+C_4x\cos x+C_5x\sin x$.